Лекція № 11

4.5. Чотиривимірна форма рівняння руху заряду в полі

Знайдемо ще раз рівняння руху заряду в полі за допомогою принципу найменшої дії. Функція дії у 4-формі була побудована раніш (див. ф-лу (4.5))

$$S=-\int_a^b P_i dx^i=-\int_a^b\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)dx^i. \qquad (4.24)$$

Інтеграл в (4.24) – це криволінійний інтеграл в 4-просторі. Шукаємо варіацію δS

$$\delta S=-\delta\int_a^b\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)dx^i=-\int_a^b\left[\left(mc\delta u_i+\frac{e}{c}\delta A_i\right)dx^i+\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)\delta(dx^i)\right]=$$

$$=-\int_a^b\left[\left(mc\delta u_i dx^i+\frac{e}{c}\delta A_i dx^i\right)+\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)\delta(dx^i)\right]=$$

$$=-\int_a^b\left[\left(mc\delta u_i\frac{dx^i}{ds}ds+\frac{e}{c}\delta A_i dx^i\right)+\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)d(\delta x^i)\right];$$

Перший доданок

$$\delta u_i\frac{dx^i}{ds}=\delta u_i u^i=0,$$

бо $u_i u^i=1,\ \delta(u_i u^i)=2(\delta u_i)u^i=2u_i(\delta u^i)=0.$

$$\delta S=-\int_a^b\left[\frac{e}{c}\delta A_i dx^i+\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)d(\delta x^i)\right].$$

Інтегруємо по частинах другий доданок

$$\delta S=-\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i\Big|_a^b+\int_a^b\left[-\frac{e}{c}\delta A_i dx^i+d\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)\delta(x^i)\right]=$$

$$=-\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i\Big|_a^b+\int_a^b\left[-\frac{e}{c}\delta A_i dx^i+\left(mcdu_i+\frac{e}{c}dA_i\right)\delta(x^i)\right];$$

Врахуємо, що

$$\delta A_i=\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^k;\quad dA_i=\frac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^k.$$

$$\delta S=-\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i\Bigg|_a^b+\int_a^b\left[-\frac{e}{c}\underbrace{\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^k dx^i}_{\substack{k\rightleftarrows i\\ \text{змінимо}}}+\left(mcdu_i+\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^k\right)\delta x^i\right]=$$

$$=-\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i\Bigg|_a^b+\int_a^b\left[mcdu_i-\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)dx^k\right]\delta x^i=$$

$$=-\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i\Bigg|_a^b+\int_a^b\left[mc\frac{du_i}{ds}-\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)\frac{dx^k}{ds}\right]ds\delta x^i.$$

Отримали варіацію функції дії (4.24)

$$\delta S=-\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i\Bigg|_a^b+\int_a^b\left[mc\frac{du_i}{ds}-\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k\right]ds\delta x^i. \quad (4.25)$$

Рівняння руху з (4.25) знаходимо за умови $\delta S=0$ та $\delta x^k(a)=\delta x^k(b)=0$ – всі траєкторії у 4-просторі починаються та закінчуються у фіксованих точках 4-простору *a* та *b* відповідно:

$$\delta S=\underbrace{\int_a^b\left[mc\frac{du_i}{ds}-\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k\right]}_{=0}ds\underset{\neq 0}{\delta x^i}.$$

Маємо рівняння руху заряду в електромагнітному полі у коваріантній формі

$$mc\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k;\quad i=0,1,2,3. \quad (4.26)$$

В рівнянні (4.26) руху заряду в 4-формі зліва та справа стоять 4-вектори, тож можна бути впевненими, що при поворотах чотиривимірної системи координат вигляд рівняння не змінюється – перетворення обох частин однакові.

Введемо позначення для антисиметричного 4-тензору 2-го рангу, який є справа в (4.26)

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \quad (4.27)$$

Тензор F_{ik} – це тензор електромагнітного поля. З математичної точки зору він є 4-ротором від 4-потенціалу A_i. Формула (4.27) визначає коваріантні компоненти.

Рівняння руху заряду в чотиривимірній формі полі приймає такий вигляд

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}u^k; \quad i = 0,1,2,3. \tag{4.28}$$

або

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}u^k; \quad i = 0,1,2,3. \tag{4.29}$$

Варіацію функції дії (4.25) можна трактувати інакше, якщо вважати, що рух відбувається по дійсним траєкторіям, які починаються в певній точці 4-простору ($\delta x^i(a) = 0$) та закінчуються в довільній точці ($\delta x^i(b) = \delta x^i \neq 0$).Інтегральний член (це рівняння руху по дійсним траєкторіям) дорівнює 0 й залишається

$$\delta S = -\left(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i\Bigg|_a^b + \int_a^b \left[\underbrace{mc\frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k}_{=0(\text{дійсні траєкторії})}\right] ds\delta x^i =$$

$$= -\left(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i.$$

Така функція дії є функцією точки 4-простору від довільної точки 4-простору (координат та часу). Згідно з визначенням узагальненого імпульсу через функцію дії отримаємо

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial x^i} = -\left(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\right). \tag{4.30}$$

4.6. Тензор електромагнітного поля

Визначимо зміст компонент тензору електромагнітного поля (4.27). Відставимо для цього в (4.27) компоненти 4-потенціалу (беремо коваріантні компоненти) $A_i = (\varphi, -\vec{A})$ та згадаємо, як напруженості електричного та магнітного полів пов’язані з похідними від скалярного та векторного потенціалів (ф-ли (4.10), (4.11)). Ось вони

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi; \quad \vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}.$$

Наприклад,

$$F_{01}=\frac{\partial A_1}{\partial x^0}-\frac{\partial A_0}{\partial x^1}=-\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}=E_x.$$

Компоненти $F_{0\alpha}$ та $F_{\alpha 0}$ виражаються через напруженість електричного поля

$$F_{0\alpha}=-\frac{1}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}=E_\alpha;\quad F_{\alpha 0}=-F_{0\alpha}=-E_\alpha.$$

Просторові компоненти виражаються через компоненти напруженості магнітного поля

$$F_{12}=\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}=-\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial y}=-\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=-H_z;$$

$$F_{23}=\frac{\partial A_3}{\partial x^2}-\frac{\partial A_2}{\partial x^3}=-\frac{\partial A_z}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial z}=-\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)=-H_x;$$

$$F_{13}=\frac{\partial A_3}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^3}=-\frac{\partial A_z}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial z}=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=H_y.$$

Коваріантний тензор електромагнітного поля має такий вигляд:

$$F_{ik}=\begin{pmatrix}0 & E_x & E_y & E_z\\ -E_x & 0 & -H_z & H_y\\ -E_y & H_z & 0 & -H_x\\ -E_z & -H_y & H_x & 0\end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Контраваріантний тензор виглядає так:

$$F^{ik}=\begin{pmatrix}0 & -E_x & -E_y & -E_z\\ E_x & 0 & -H_z & H_y\\ E_y & H_z & 0 & -H_x\\ E_z & -H_y & H_x & 0\end{pmatrix}. \tag{4.32}$$

В векторному вигляді (4.31) та (4.32) пишемо так

$$F_{ik}=(\vec{E},\vec{H});\quad F^{ik}=(-\vec{E},\vec{H}). \tag{4.33}$$

Рівняння руху заряду в полі можна написати й у контраваріантному вигляді

$$mc\frac{du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^{ik}u_k. \tag{4.34}$$

Помножимо обидві частини (4.28) на u^k та виконаємо згортання

$$mc\underbrace{\frac{du_i}{ds}u^i}_{=0}=\frac{e}{c}\underbrace{F_{ik}u^k u^i}_{=0}.$$

Права частина дорівнює нулю, бо це згортання симетричного $u^k u^i = u^i u^k$ та антисиметричного $F_{ik} = -F_{ki}$ тензорів, отже обидві частини тотожно дорівнюють нулю. З 4-х рівнянь (4.28) тільки три є незалежними. Просторові компоненти ($i = 1,2,3$) дають тривимірне рівняння руху, а часова компонента ($i = 0$) – закон зміни енергії (рівняння роботи), який є наслідком рівняння руху.

Перевіримо це. Наприклад, для $i = 1$:

$$mc\frac{du_x}{ds}=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\frac{d}{dt}\left(-\frac{m\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{dp_x}{dt};$$

$$F_{1k}u^k = F_{10}u^0 + F_{12}u^2 + F_{13}u^3 =$$

$$=-E_x\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)-H_z\left(\frac{\upsilon_y}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)+H_y\left(\frac{\upsilon_z}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right);$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\frac{dp_x}{dt}=\frac{e}{c}\left[E_x\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)+H_z\left(\frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)-H_y\left(\frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\right];$$

$$\cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)}\frac{dp_x}{dt}=\cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)}\left[eE_x+\frac{e}{c}\underbrace{\left(\upsilon_y H_z-\upsilon_z H_y\right)}_{[\vec{\upsilon},\vec{H}]_x}\right];$$

$$\frac{dp_x}{dt}=eE_x+\frac{e}{c}[\vec{\upsilon},\vec{H}]_x.$$

Маємо для просторових компонент

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=e\vec{E}+\frac{e}{c}[\vec{\upsilon},\vec{H}].$$

Тепер для часової компоненти $i = 0$:

$$mc\frac{du_0}{ds} = mc\frac{1}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{c^2}\frac{d\varepsilon}{dt};$$

$$F_{0k}u^k = F_{01}u^1 + F_{02}u^2 + F_{03}u^3 = \frac{E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}};$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)\frac{1}{c^2}\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{e}{c}\left(\frac{E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right);$$

$$\cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)}\frac{1}{\cancel{c^2}}\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{e}{\cancel{c}}\left(\frac{E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z}{\cancel{c}\cancel{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}}\right);$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = e\left(\vec{E},\vec{v}\right).$$

4.7. Перетворення Лоренца для електромагнітного поля

Згідно з визначенням 4-вектору його перетворення при поворотах системи координат відбувається так само, як перетворення 4-радіус-вектору. При частинних перетвореннях Лоренца (поворот в площині x^0, x^1, тобто рух ІСВ S' відносно ІСВ S уздовж додатного напрямку осі x зі швидкістю V) згідно з формулою (1.51)

$$A^0 = \frac{A^{0\prime} + \dfrac{V}{c}A^{1\prime}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}; \quad x^1 = \frac{\dfrac{V}{c}A^{0\prime} + A^{1\prime}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}; \quad A^2 = A^{2\prime}; \quad A^3 = A^{3\prime}.$$

Або в тензорних позначеннях

$$A^i = \alpha_{ik}A^{k\prime}; \quad \alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{4.35}$$

α_{ik} – матриця повороту частинних перетворень Лоренца; $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\beta = \dfrac{V}{c}$.

Контраваріантні компоненти 4-потенціалу $A^i = \left(\varphi, \vec{A}\right) = (\varphi, A_x, A_y, A_z)$. За допомогою (1.51) ((4.35)) маємо

$$A_x = \frac{A'_x + \dfrac{V}{c}\varphi}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}};\quad A_y = A'_y;\quad A_z = A'_z;\quad \varphi = \frac{\varphi' + \dfrac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}};\qquad (4.36)$$

4-тензор 2-го рангу перетворюється, як добуток двох векторів. Для контраваріантних компонент F^{ik}

$$F^{ik} = \alpha_{il}\alpha_{km}F'^{lm}.\qquad (4.37)$$

Почнемо з перетворення компоненти $F^{23} = -H_y$. Згідно з (4.37)

$$F^{23} = \alpha_{2l}\alpha_{3m}F'^{lm} = \underset{1}{\alpha_{22}}\,\underset{1}{\alpha_{33}}\,F'^{23} = F'^{23};$$

$$F^{23} = F'^{23};\quad H_x = H'_x.$$

Тепер розглянемо перетворення $F^{01} = -E_x$:

$$F^{01} = \alpha_{0l}\alpha_{1m}F'^{lm} = \alpha_{00}\alpha_{11}F'^{01} + \alpha_{01}\alpha_{10}F'^{10} = \left(\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10}\right)F'^{01};$$

$$\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = \gamma^2 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\gamma^2 = \left[1-\left(\frac{V}{c}\right)^2\right]\gamma^2 = 1.$$

$$F^{01} = F'^{01};\quad E_x = E'_x.$$

Компоненти напруженості поля в напрямку руху ІСВ S' відносно ІСВ S не перетворюються: $E_x = E'_x, H_x = H'_x$.

Змінюються тільки компоненти, які перпендикулярні напрямку руху ІСВ S' відносно ІСВ S. Наприклад,

$$F^{02} = \alpha_{0l}\alpha_{2m}F'^{lm} = \alpha_{0l}\,\underset{1}{\alpha_{22}}\,F'^{l2} = \alpha_{0l}F'^{l2} =$$

$$= \underset{\gamma}{\alpha_{00}}\,F'^{02} + \underset{\beta\gamma}{\alpha_{01}}\,F'^{12} = \gamma\left(F'^{02} + \beta F'^{12}\right);$$

$$E_y = \gamma\left(E'_y + \beta H'_z\right).$$

$$F^{03} = \alpha_{0l}\alpha_{3m}F'^{lm} = \alpha_{0l}\,\underset{1}{\alpha_{33}}\,F'^{l3} = \alpha_{0l}F'^{l3} =$$

$$= \underset{\gamma}{\alpha_{00}}\,F'^{03} + \underset{\beta\gamma}{\alpha_{01}}\,F'^{13} = \gamma\left(F'^{03} + \beta F'^{13}\right);$$

$$E_z = \gamma\left(E'_z - \beta H'_y\right).$$

Перетворення компонент H_y та H_z знаходяться аналогічно.

$$F^{13} = \alpha_{1l}\alpha_{3m}F'^{lm} = \alpha_{1l}\,\underset{1}{\alpha_{33}}\,F'^{l3} = \alpha_{1l}F'^{l3} =$$

$$= \underset{\beta\gamma}{\alpha_{10}}\,F'^{03} + \underset{\gamma}{\alpha_{11}}\,F'^{13} = \gamma\left(F'^{13} + \beta F'^{03}\right);$$

$$H_y = \gamma\left(H'_y - \beta E'_z\right).$$

$$F^{12} = \alpha_{1l}\alpha_{2m}F'^{lm} = \alpha_{1l}\,\underset{1}{\alpha_{32}}\,F'^{l2} = \alpha_{1l}F'^{l2} =$$

$$= \underset{\beta\gamma}{\alpha_{10}}\,F'^{02} + \underset{\gamma}{\alpha_{11}}\,F'^{12} = \gamma\left(F'^{12} + \beta F'^{02}\right);$$

$$H_z = \gamma\left(H'_z + \beta E'_y\right).$$

Отримали такі формули перетворень Лоренца для напруженості електромагнітного поля:

$$\begin{aligned} &E_x = E'_x; \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \\ &H_x = H'_x; \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

В скорочених позначеннях формули (4.38) виглядають так

$$\begin{aligned} &E_x = E'_x; \quad E_y = \gamma\left(E'_y + \beta H'_z\right); \quad E_z = \gamma\left(E'_z - \beta H'_y\right); \\ &H_x = H'_x; \quad H_y = \gamma\left(H'_y - \beta E'_z\right); \quad H_z = \gamma\left(H'_z + \beta E'_y\right). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Таким чином, в напрямку руху (це вісь x) поле не перетворюється. Перетворення поля відбувається тільки в напрямку перпендикулярному руху системи відліку S' відносно S.